Chapitre 2: Transformée de Laplace

1 Définitions et propriétés.

1.1 Définitions.

Soit $s \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction. On définit la transformée de Laplace par

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt. \tag{1}$$

On dit que $\mathcal{L}(f)$ est la transformée de Laplace de f.
L'application $f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est appelée transformation de Laplace.

Remarque 1.1. *La tratransformée de Laplace de f existe si l'intégrale* (1) *converge pour certaines valeurs de s.*

Exemples 1.1. *Soit $f(t) = 1$ si $t \geq 0$. On vérifie que*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(1)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} &= \frac{1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-st}}{s} \\ = \frac{1}{s}, \quad &\textit{si} \quad \mathrm{Re}\,(s) > 0.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}, \quad \textit{pour tout} \quad s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(s) > 0.$$

1.2 Conditions suffisantes d'existence.

Proposition 1.2. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. S'il existe des réels $A > 0$, $t_0 > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall t \geq t_0, \quad |f(t)| \leq Ae^{\gamma t}$$

On dit que la fonction f est d'ordre exponentiel γ quand $t \to +\infty$.

Exemples 1.3.

- *$f(t) = t^2$ est d'ordre exponentiel $1, 2, 3, \cdots$ car:*

$$t^2 < e^t < e^{2t} < \cdots \quad \forall t > 0$$

- *$f(t) = e^{at}$ est d'ordre exponentiel (pour tout $a \in \mathbb{R}$) car:*

$$\forall \gamma > a, \quad e^{at} < e^{\gamma t}$$

Proposition 1.4. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. On dit que "f est de classe (L)" si elle vérifie*

1) f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

2) f est d'ordre exponentiel quand $t \to +\infty$.

Théorème 1.5. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe (L) et d'ordre exponentiel γ quand $t \to +\infty$. Alors, la transformée de Laplace de f existe pour tout s tel que* $\operatorname{Re}(s) > \gamma$.

Remarque 1.2. *Le théorème* 1.5 *donne des conditions suffisantes pour garantir l'existence de la transformée de Laplace, mais ces conditions ne sont pas nécessaires. La transformée de Laplace peut donc exister ou non si elles ne sont pas vérifiées.*

Exercice.

1) Soit $f(t) = e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall \operatorname{Re}(s) > a, \quad \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}.$$

Plus généralement, on a pour tout $a \in \mathbb{C}$

$$\forall \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a), \quad \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}.$$

1.3 Propriétés de la transformée de Laplace

Proposition 1.6 (Linéarité)**.** *Soient α et $\beta \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g).$$

Exercice. Vérifier que

$$\forall s > 0, \ \ \mathcal{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2+1},$$
$$\forall s > 0, \ \ \mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Proposition 1.7 (Multiplication par l'exponentielle)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s-\lambda) = \tau_\lambda \mathcal{L}(f)(s).$$

Proposition 1.8 (Translatée)**.** *Soit $a > 0$. Alors*

$$\mathcal{L}(\tau_a f)(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f)(s).$$

Le terme e^{-as} s'appelle le facteur de retard.

Proposition 1.9 (changement d'échelle)**.** *Soit $a > 0$. Alors*

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{a}).$$

Proposition 1.10 (Dividion par la variable)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ telle que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{t}$ existe. Alors*

$$\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})(s) = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}(f)(u)du.$$

Proposition 1.11 (Multiplication par la variable)**.** *On a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}(f)(s)).$$

En particulier

$$\mathcal{L}(tf(t))(s) = -(\mathcal{L}(f))'(s),$$
$$\mathcal{L}(t^2 f(t))(s) = \frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}(f)(s)).$$

Proposition 1.12 (Dérivée)**.**
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ dérivable. On suppose que $\mathcal{L}(f')$ existe. Alors

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+),$$

où $f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t)$.
En outre, si f est deux fois dérivable et $\mathcal{L}(f'')$ existe alors

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0^+) - f'(0^+).$$

Plus généralement, si f est dérivable jusqu'à l'ordre n et pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a $\mathcal{L}(f^{(i)})$ existe. Alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{n-1}(0^+).$$

Théorème 1.13 (de la valeur initiale)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$.*

$$\text{Si } \lim_{x \to 0^+} f(x) = l \in \mathbb{C} \quad \text{alors} \quad \lim_{s \to +\infty} s\mathcal{L}(f)(s) = l.$$

Théorème 1.14 (de la valeur finale)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

$$\text{Si } \lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{C} \quad \text{alors} \quad \lim_{s \to 0^+} s\mathcal{L}(f)(s) = l.$$

1.4 Convolution.

Proposition 1.15. *Soient f et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. On définit le produit de convolution de f et g par*

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition 1.16. *On a*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Proposition 1.17. *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$. Alors*

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^x f(t)dt\Big)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s).$$

2 Transformée de Laplace inverse.

Proposition 2.1 (de Lerch)**.** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe (L). Alors, la transformée de Laplace existe et est unique. Si on pose $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$, on dit que f est l'original de F (ou la transformée de Laplace inverse de F). On note $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$.*

Exemples 2.2. *Soit $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2-1)}$. On écrit*

$$F(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)} = -\mathcal{L}(1)(s) + \mathcal{L}\Big(\frac{1}{2}e^t\Big)(s) + \mathcal{L}\Big(\frac{1}{2}e^{-t}\Big)(s) = \mathcal{L}\Big(-1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}\Big)(s).$$

Il en découle

$$f(t) = \Big(-1 + \frac{e^t + e^{-t}}{2}\Big) = \operatorname{ch}(t) - 1.$$

3 Tables récapitulatives.

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha\mathcal{L}(f)(s)+\beta\mathcal{L}(g)(s)$
$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{\alpha})$
$\tau_a f$	$e^{-as}\mathcal{L}(f)$
$e^{at}f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s-a)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^{\infty}\mathcal{L}(f)(u)du$
$t^n f$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}(f)(s))$
f'	$s\mathcal{L}(f)(s)-f(0^+)$
f''	$s^2\mathcal{L}(f)-sf(0^+)-f'(0^+)$
$f*g$	$\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$
$\displaystyle\int_0^t f(x)dx$	$\frac{\mathcal{L}(f)(s)}{s}$

Table 1: Propriétés générales de la transformation de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\mathrm{ch}\,(wt)$	$\frac{s}{s^2-w^2}$
$\mathrm{sh}\,(wt)$	$\frac{w}{s^2-w^2}$
$e^{at}\cos(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$
$e^{at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$
$e^{at}\,\mathrm{ch}\,(wt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-w^2}$
$e^{at}\,\mathrm{sh}\,(wt)$	$\frac{w}{(s-a)^2-w^2}$

Table 2: Table de quelques transformées de Laplace

4 Résolution des EDOs à l'aide de la transformée de Laplace.

La transformée de Laplace est utile pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Exemples 4.1. *Résoudre à l'aide de la transformée de Laplace l'équation différentielle suivante:*

$$y''(t) + y(t) = t + 1 \quad \text{avec} \quad y(0) = y'(0) = 2.$$

On suppose toujours que $t \geq 0$.
On pose $F(s) = \mathcal{L}(y)(s)$. On applique la Transformée de Laplace aux deux membres de l'équation. En tenant compte que

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2F(s) - sy(0^+) - y'(0^+) = s^2F(s) - 2s - 2.$$

$$\mathcal{L}(t+1)(s) = \mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

On trouve que

$$s^2F(s) - 2s - 2 + F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Ceci est équivalent à

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}(2s + 2 + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}) = \frac{2s^3 + 2s^2 + s + 1}{s^2(s^2+1)}.$$

À l'aide d'une décomposition en éléments simples, on trouve

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}.$$

On déduit que

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = 1 + t + \cos(t) + \sin(t).$$